《信息学奥赛一本通·初赛真题解析》

第三章 数学问题

《信息学奥赛一本通·初赛真题解析》

第三章 数学问题

第1节 简单数论

目录

整数性质

1.带余除法，即欧几里德除法

设 a，b 为整数，b≠0，则存在整数 q 和 r，使得 $a=bq+r$，其中 $0\le r<|b|$，并且 q 和 r 由上述条件唯一确定；整数 q 被称为 a 被 b 除得的(不完全)商，数 r 称为 a 被 b 除得的余数。

注意：r 共有 $|b|$ 种可能的取值：0，1，…，$|b|-1$。若 r=0，即为 a 被 b 整除的情形，因此，证明 $b|a$ 的基本手法是将 a 分解为 b 与一个整数之积。

带余除法的核心是关于余数 r 的不等式：$0\le r<|b|$。

整数性质

2.任何一个正整数 n，都可以写成 $n = 2^m l$ 的形式，其中 m 为非负整数，l 为奇数。

3.若 a∈Z，a>1，则 a 的除 1 以外的最小正因数 q 是一个质(素)数，如果 q≠a，则 $q \leq \sqrt{a}$ 。

推论：如果不超过 $\sqrt{a}$ 的所有质数均不是 a 的约数，则 a 必为质数。

整数性质

4.算术基本定理(素数唯一分解定理)任何一个大于 1 的正整数 a，能唯一地表示成质（素）因数的乘积（不计较因数的排列顺序）

任何大于 1 的整数 a 能唯一地写成 $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ （1）的形式，其中 p_i 为素数（$p_i < p_j (i < j)$），$a_i \in N_+$，i=1，2，…，k。上式叫做整数 a 的标准分解式。

推论 1：若 a 的标准分解式是（1）式，则 d 是 a 的正因数的充要条件是：

$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, 0 \le \beta_i \le a_i$，i=1，2，…，k。 （2）

应注意（2）不能称为是 d 的标准分解式，其原因是其中的某些 β_i 可能取零值（当 d 不含某个素因数 p_i 时，$\beta_i = 0$）。

推论 2：设 a=bc，且(b，c)=1，若 a 是整数的 k（k≥2）次方，则 b，c 也是整数的 k 次方。特别地，若 a 是整数的平方，则 b，c 也是整数的平方。

一般地，设正整数 a，b，…，c 之积是一个正整数的 k 次方幂（k≥2），若 a，b，…，c 两两互素，则 a，b，…，c 都是正整数的 k 次方幂。

整 除

（一）常见数字的整除判定方法

1.一个数的末位能被 2 或 5 整除，这个数就能被 2 或 5 整除；一个数的末两位能被 4 或 25 整除，这个数就能被 4 或 25 整除；一个数的末三位能被 8 或 125 整除，这个数就能被 8 或 125 整除。

2.一个数各位数字和能被 3 整除，这个数就能被 3 整除；一个数各位数字和能被 9 整除，这个数就能被 9 整除。

3.如果一个整数的奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差能被 11 整除，那么这个数能被 11 整除。

整 除

4.如果一个整数的末三位与末三位以前的数字组成的数之差能被 7、11 或 13 整除，那么这个数能被 7、11 或 13 整除。

5.如果一个数能被 99 整除，这个数从后两位开始两位一截所得的所有数(如果有偶数位，则拆出的数都是两位数;如果是奇数位，则拆出的数中有若干个两位数，还有一个是一位数) 的和是 99 的倍数，这个数一定是 99 的倍数。

整 除

（二）整除的性质

1.性质 1 如果数 a 和数 b 都能被数 c 整除，那么它们的和或差也能被 c 整除。

2.性质 2 如果数 a 能被数 b 整除，b 又能被数 c 整除，那么 a 也能被 c 整除。

3.性质 3 如果数 a 能被数 b 与数 c 的积整除，那么 a 也能被 b 或 c 整除。

（二）整除的性质

4.性质 4 如果数 a 能被数 b 整除，也能被数 c 整除，且数 b 和数 c 互质，那么 a 一定能被 b 与 c 的乘积整除。

例如:如果 3 | 12，4 | 12， 且(3，4)=1 ,那么(3x4) | 12。

5.性质 5 如果数 a 能被数 b 整除，那么 am 也能被 bm 整除。

6.性质 6 如果数 a 能被数 b 整除，且数 c 能被数 d 整除，那么 ac 也能被 bd 整除。

余数

（一）余数三大余数定理

1.余数的加法定理。

a 与 b 的和除以 c 的余数，等于 a、b 分别除以 c 的余数之和，或这个和除以 c 的余数。例如:23、16 以 5 的余数分别是 3 和 1，所以 23+16=39 除以 5 的余数等于 4，即两个余数的 3 与 1 的。

当余数的和比除数大时，所求的余数等于余数之和再除以 c 的余数。例如：23、19 除以的余数分别是 3 和 4，所以 23+19 = 42 除以 5 的余数等于 3+4=7 除以 5 的余数，即为 2。

余数

（一）余数三大余数定理

2.余数的减法定理。

a 与 b 的差除以 c 的余数，等于 a、 b 分别除以 c 的余数之差。例如:23、16 除以 5 的余数分别是 3 和 1,所以 23 － 6 = 7 除以 5 的余数等于 2，即两个余数差 3-1 = 2。

当余数的差不够减时，补上除数再减。例如:23、14 除以 5 的余数分别是 3 和 4，23-14=9 除以 5 的余数等于 4,即两个余数差为(3+5)-4 = 4

余数

（一）余数三大余数定理

3.余数的乘法定理。

a 与 b 的乘积除以 c 的余数，等于 a、b 分别除以 c 的余数的积，或者这个积除以 c 所得的余数。例如:23、16 除以 5 的余数分别是 3 和 1,所以 23x 16 除以 5 的余数等于 3 x 1 = 3。

当余数的积比除数大时，所求的余数等于余数之积再除以 c 的余数。例如:23、19 除以 5 的余数分别是 3 和 4，所以 23 x 19 除以 5 的余数等于 3 x 4 除以 5 的余数，即 2。

乘方:如果 a 与 b 除以 m 的余数相同，那么 a^n 与 b^n 除以 m 的余数也相同。

余数

（二）同余定理

1.同余的定义

若两个整数 a、b 被自然数 m 除有相同的余数，那么称 a、b 对于模 m 同余，用式子表示为：a == b (mod m) 左边的式子叫作同余式(读作：a 同余于 b，模 m)。

2.同余的重要性质及推论

若两个数 a，b 除以同一个数 m 得到的余数相同，则 a，b 的差定能被 m 整除。例如：17 与 11 除以 3 的余数都是 2,所以 17-11 能被 3 整除。用式子表示为:如果有 a==b(mod m)，那么一定有 a-b=mk，k 是整数，即 m|(a-b)。

余数

（二）同余定理

3.余数判别法

当一个数不能被另一个数整除时，虽然可以用长除法求得余数，但当被除数位数较多时，计算是很麻烦的。建立余数判别法的基本思想是：为了求出“N 被 m 除的余数”，我们希望找到一个较简单的数 R，使得 N 与 R 对于除数 m 同余。由于 R 是一个较简单的数，所以可以通过计算 R 被 m 除的余数来求得 N 被 m 除的余数。

素数与约数

（一）素数的判定

1.方法一：对于一个数 N,可以从 2 枚举到 N-1，从而判断这个数是不是素数，时间复杂度为 O(N)。

```
bool ck_prime(int n){
    if(n==1)  return false;
    if(n==2)  return true;
    for(int i=2;i<n;i++)
        if(n%i==0)
            return false;
    return true;
}
```

素数与约数

（一）素数的判定

2.方法二：不难发现 N 的因数是成对出现的，所以对于任何一个整数 N，只需要从 1 枚举到$\sqrt{N}$，时间复杂度为 O($\sqrt{N}$)。

```
bool ck_prime(int n){
    if(n==1)    return false;
    if(n==2)    return true;
    for(int i=2;i*i<=n;i++) //或者 i<=sqrt(n)
        if(n%i==0)
            return false;
    return true;
}
```

素数与约数

（一）素数的判定

3.方法三：Miller-Rabin 素数判定

有时候我们想快速的知道一个数是不是素数，而这个数又特别的大，导致 O($\sqrt{N}$) 的算法不能通过，这时候我们可以对其进行 Miller-Rabin 素数测试，可以大概率测出其是否为素数。

需要说明的两个基本定理：

费马小定理：当 P 为素数，有 aP-1≡1(%P)，反过来不一定成立，也就是说，如果 a，P 互质，且 aP-1≡1(%P)，不能推出 P 是素数。

二次探测：如果 P 是一个素数，0 < x < P， 则方程 x2≡1(%P)的解为 x = 1 或 x = P-1。

素数与约数

（二）素数的筛选

求出 1~n 之间的所有素数，称为素数的筛选问题。

筛选素数的方法有很多种，一般都是基于“素数的倍数一定不是素数”的思想。公元前 250 年古希腊数学家埃拉托斯特尼发明了一种寻找素数的方法，我们称之为“埃拉托斯特尼筛法”。

素数与约数

（二）素数的筛选

1.方法一：埃拉托斯特尼筛法/Eratosthenes 筛选，也叫埃氏筛法。

基本思想：素数的倍数一定不是素数。

实现方法：用一个长度为 N+1 的数组保存信息（0 表示素数，1 表示非素数），先假设所有的数都是素数（初始化为 0），从小到大枚举每一个素数 x,把 x 的倍数都标记为非素数(置为 1)。实际上小于 x^2 的 x 的倍数在扫描更小的数时就已经被标记过，因此可对埃筛法优化，对于每一个 x，把大于等于 x^2 的 x 的倍数标记为合数即可，时间复杂度为 O(nlogn)。

素数与约数

（二）素数的筛选

1.方法一：埃拉托斯特尼筛法/Eratosthenes 筛选，也叫埃氏筛法，代码实现：

```
void primes(int n){
    memset(vis,0,sizeof(vis));
    vis[1]=1;              //1 不是素数标记为 1
    for(int i=2;i<=n;i++){
        if(vis[i])         //vis[i]=1 代表 i 不是素数
            continue;
        cout<<i<<endl;  //否则输出素数 i
        for(int j=i;j<=n/i;j++)
            vis[i*j]=1; //大于等于 i² 的 i 的倍数标记为合数
    }
}
```

（二）素数的筛选

2.方法二：线性筛法(欧拉筛)

通过上述代码，发现此方法还可以继续优化，因为上述的方法中，每一个数有多组因数可能会被筛多次，例如：30 会被 2,3,5 各筛一次导致计算冗余，可以对此方法进行改进，得到更加高效的筛法。

基本思想：每个合数只被它的最小的素因子筛一次。

实现方法:数组 v 记录每个数的最小素因子,每个合数只会被它的最小的素因子筛一次，时间复杂度为 O(n)。

素数与约数

（二）素数的筛选

2.方法二：线性筛法(欧拉筛)代码实现：

```
int v[MAXN],prime[MAXN];
void primes(int n){
memset(v,0,sizeof(v));  //数组 v 保存最小素因子 m=0; //素数数量
for(int i=2;i<=n;i++){
    if(v[i]==0){  //i 是素数
        v[i]=i;    //素数 i 的最小素因子是其本身
        prime[++m]=i;
    }
    for(int j=1;j<=m;j++){  //给当前的数 i 乘一个素因子
          if(prime[j]>v[i]||prime[j]>n/i)
                break;       //i 有比 prime[j]更小的素因子或者超出 n 的范围
          v[i*prime[j]]=prime[j];  //prime[j]是合数 i*prime[j]的最小素因子
    }
}
for(int i=1;i<=m;i++)
     cout<<prime[i]<<endl; //输出
}
```

素数与约数

（三）素数的性质

1.质数 p 的约数只有两个： 1 和 p。

2.初等数学基本定理:任一大于 1 的自然数，要么本身是质数，要么可以分解为几个质数之积，且这种分解是唯一的。

3.质数的个数是无限的。

4.质数的个数公式 pi(x) 是不减函数。

素数与约数

（三）素数的性质

5.若 n 为正整数，在 n^2 到(n+1)^3 之间至少有一个质数。

6.若 n 为大于或等于 2 的正整数，在 n 到 n!之间至少有一个质数。

7.若质数 p 为不超过 n(n≥4)的最大质数，则 p>n/2。

（四）质因数分解

把一个合数分解成若干个质因数乘积的形式（即求质因数的过程）叫做分解质因数（也叫分解素因数）。

对 n 分解质因数为质因数的乘积，要从最小的素数开始，我们从 2 开始试除，能整除，就输出 2，再对商继续试除，直到把包含 2 的因子“除干净”；然后再用下一个素数试除，然后再下一个素数试除……直到商为 1 结束。

素数与约数

（四）质因数分解

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main(){
   int n,i=2;
   scanf("%d",&n);
   cout<<n<<'=';
   do{
    while(n%i==0){
        cout<<i;
        n=n/i;
        if(n!=1)cout<<'*';
       }
       i++;
   }
   while(n!=1);//n 没有除尽，继续操作
   return 0;
}
```

约数与素数

（五）约数的判定

若 d>=sqrt(N)是 N 的约数，则 N/d<=sqrt(N)也是 N 的约数，也就是说约数总数成对地出现。因此，只需要扫描 d=1~sqrt(N)，看 d 能否整除 N，若能整除则 N/d 也是 N 的约数，算法时间复杂度为 O($\sqrt{N}$)。

素数与约数

（五）约数的判定

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int p[100100];
void deal (int n) {
	int m = 0;
	for (int i = 1;i*i <= n;i ++) {
		if (n % i == 0) {
			p[++m] = i;
			if (i != n/i) p[++m] = n/i;
		}
	}
	sort (p+1, p+1+m);
	for (int i = 1;i <= m;i ++) cout << p[i] << '  ';
}
int main () {
	int x;
	cin >> x;
	deal (x);
	return 0;
}
```

最大公约数与最小公倍数

（一）最大公约数

设整数 a，b，…，c 不全为零，同时整除 a，b，…，c 的整数（如±1）称为它们的公约数。因为 a，b，…，c 不全为零，故同时整除 a，b，…，c 的整数只有有限多个，其中最大的一个称为 a，b，…，c 的最大公约数，用符号（a，b，…，c）表示。

当（a，b，…，c）＝1（即 a，b，…，c 的公约数只有±1）时，称 a，b，…，c 互素（互质）。请注意，(如涉及三个及三个以上的整数)此时不能推出 a，b，…，c 两两互素；但反过来，若 a，b，…，c 两两互素，则显然有（a，b，…，c）＝1。

最大公约数与最小公倍数

（二）最小公倍数

设 a，b，…，c 均是非零整数，一个同时为 a，b，…，c 倍数的数称为它们的公倍数，a，b，…，c 的公倍数有无穷多个，这其中最小的一个正整数称为 a，b，…，c 的最小公倍数，记作 [a，b，…，c]。

最大公约数与最小公倍数

（三）由最大公约数、最小公倍数的定义，不难得出它们的一些简单性质

1.a，b 的任何一个公约数都是它们最大公约数的约数，即若 $m|a,m|b$，则 $m|(a,b)$；

2.a，b 的任何一个公倍数都是它们最小公倍数的倍数，即若 $a|m,b|m$，则 $[a,b]|m$；

3.若 $b\in N_+$，则(0，b)=b，[1，b]=b；

4.对于任意的整数 x，有(a，b)=(a，b+ax)；

5.(辗转相除法)设 a，b∈Z，b≠0，由带余除法知 $a=bq+r,0\le r<|b|,q,r\in Z$。

故（a，b）=（b，r）。

最大公约数与最小公倍数

（三）由最大公约数、最小公倍数的定义，不难得出它们的一些简单性质

6.裴蜀定理：设 a，b 是不全为 0 的整数，则存在整数 x，y，使得 ax+by=(a，b)；(其中 x，y 不唯一。如：加上等式 ab-ab=0，有 a(b+x)+b(y-a)=1，即裴蜀等式除通过辗转相除得到外，也可通过“凑”、恒等变形等其它办法得到)。

特别是，两个整数 a，b 互素的充要条件是存在整数 x，y，使得 ax+by=1。

最大公约数与最小公倍数

（三）由最大公约数、最小公倍数的定义，不难得出它们的一些简单性质

7.设两个正整数 a，b 的分解式分别为

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, \alpha_i \geq 0, i = 1,2,,\cdots,k$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \beta_i \geq 0, i = 1,2,,\cdots,k$$

取 $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}, \delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\},$

则 $(a,b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k}, [a,b] = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_k^{\delta_k}.$

注：此结论对多个正整数 a1，a2，…，an 仍成立。

8.两个整数的最大公约数与最小公倍满足：$(a,b) \cdot [a,b] = |ab|$。

最大公约数与最小公倍数

（四）最大公约数和最小公倍数的求法

假设 x 和 y 的最大公约数是 m,最小公倍数是 n,由上面的性质 8 可知，xy=mn。故只需要求出最大公约数即可求得最小公倍数。

1.方法一：枚举法

对两个整数 a 和 b,共同的约数在 1 和 min(a,b)之间，从大到小枚举，若判断它能同时整除 a 和 b,即为两个数的最大公约数。该算法的最坏时间复杂度为 O(min(a,b))。

最大公约数与最小公倍数

（四）最大公约数和最小公倍数的求法

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a,b;
int main(){
    cin>>a>>b;
    for(int i=min(a,b);i>0;i--){
        if(a%i==0&&b%i==0){
            cout<<i<<' '<<a*b/i;
            break;
        }
    }
    return 0;
}
```

最大公约数与最小公倍数

（四）最大公约数和最小公倍数的求法

2.方法二：更相减损算法

若 c 是 a 和 b 的公约数(a>b)，c 亦是 b 和 a-b 的公约数，可以表示成 gcd(a,b)==gcd(b,a-b)。采用函数进行迭代，当迭代到 a==b 时，a 为 a 和 b 的最大公约数。该算法时间复杂度为 O(max(a,b))。

最大公约数与最小公倍数

（四）最大公约数和最小公倍数的求法

（1）具体代码递归实现如下：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int gcd (int a,int b) {
    if (a == b) return a;
    if (a < b) {
        swap (a, b);
    }
    return gcd (b, a-b);
}
int a, b;
int main () {
    cin >> a >> b;
    cout << gcd (a, b) << ' ' << a*b/gcd(a, b) << endl;
    return 0;
}
```

最大公约数与最小公倍数

（四）最大公约数和最小公倍数的求法

（2）具体代码非递归实现如下：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int gcd (int a,int b) { //非递归
    while (a != b) {
        if (a > b) a = a - b;
        else b = b - a;
    }
    return a;
}
int a, b;
int main () {
    cin >> a >> b;
    cout << gcd (a,b) << ' ' << a*b/gcd(a,b) << endl;
    return 0;
}
```

最大公约数与最小公倍数

（四）最大公约数和最小公倍数的求法

输入a,b，输出它们的最大公约数和最小公倍数代码如下：

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a,b;
int gcd(int a,int b){
    if(b==0)
    return a;
    else return gcd(b,a%b);
}
int main(){
    cin>>a>>b;
    cout<<gcd(a,b)<<' '<<a*b/gcd(a,b);//为了防止 a*b 爆 longlong，经常写成
a/gcd(a,b)*b
    return 0;
}
```

【课堂练习】

06 课堂练习

1.【NOIP2013】下面是根据欧几里得算法编写的函数，它所计算的是 a 和 b 的(　　)。

```
int euclid(int a, int b){
    if (b == 0)
    return a;
    else
    return euclid(b, a % b);
}
```

A.最大公共素因子　　B.最小公共素因子

C.最大公约数　　D.最小公倍数

2.【NOIP2018】10000 以内，与 10000 互质的正整数有（　　）个。

A.2000　B.4000　C.6000　D.8000

3.【NOIP2018】从 1 到 2018 这 2018 个数中，共有____个包含数字 8 的数。

《信息学奥赛一本通·初赛真题解析》

第三章 数学问题

第2节 排列组合

目录

两个基本原理

（一）加法原理

做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m1 种不同的方法，在第二类办法中有 m2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 mn 种不同的方法，那么完成这件事共有 n＝m1＋m2＋m3＋…＋mn 种不同方法。

加法原理分类计数法的要求：每一类中的每一种方法都可以独立地完成此任务；两类不同办法中的具体方法，互不相同(即分类不重)；完成此任务的任何一种方法，都属于某一类(即分类不漏)。

两个基本原理

（二）乘法原理

做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m1 种不同的方法，做第二步有 m2 种不同的方法，……，做第 n 步有 mn 种不同的方法，那么完成这件事共有 N＝m1×m2×m3×…×mn 种不同的方法。

乘法原理分步计数法的要求：任何一步的一种方法都不能完成此任务，必须且只须连续完成这 n 步才能完成此任务；各步计数相互独立；只要有一步中所采取的方法不同，则对应的完成此事的方法也不同。

排列与组合

（一）排列的定义

从 n 个不同元素中，任取 m(m≤n)个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

从排列的意义可知，如果两个排列相同，不仅这两个排列的元素必须完全相同，而且排列的顺序必须完全相同，这就告诉了我们如何判断两个排列是否相同的方法。

（二）排列数公式

从 n 个不同元素中取出 m(m≤n)个元素的所有排列，可以用记号和公式表示为：$P_n^m = A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

当 m＝n 时，称为全排列，此时表示为 $A_n^n = P_n^n = n! = n*(n-1)*\ldots*2*1$

（三）组合的定义

从 n 个不同元素中，任取 m(m≤n)个元素**并成一组**，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

从组合的定义知，如果两个组合中的元素完全相同，不管元素的顺序如何，都是相同的组合；只有当两个组合中的元素不完全相同时，才是不同的组合。

（四）组合数的公式

组合的记号和公式可以表示为：

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m}$$

由此可知：

$$A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m = C_n^{n-m} \cdot A_m^m$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$0! = 1$$

排列组合常见的计数方法

（一）特殊优先

特殊元素，优先处理；特殊位置，优先考虑

例 1:六人站成一排，求

①甲不在排头，乙不在排尾的排列数

②甲不在排头，乙不在排尾，且甲乙不相邻的排法数

排列组合常见的计数方法

（一）特殊优先

分析一：

先考虑排头，排尾，但这两个要求相互有影响，因而考虑分类。

第一类：乙在排头，有 P(5,5)种站法；

第二类：乙不在排头，当然他也不能在排尾，有 4*4*P(4,4)种站法；

共 P(5,5)+4*4*P(4,4)种站法。

排列组合常见的计数方法

（一）特殊优先

分析二：

第一类：甲在排尾，乙在排头，有 P(4,4)种方法。

第二类：甲在排尾，乙不在排头，有 3*P(4,4)种方法。

第三类：乙在排头，甲不在排头，有 4*P(4,4)种方法。

第四类：甲不在排尾，乙不在排头，有 P(3,3)*P(4,4)种方法。

共 P(4,4)+3*P(4,4)+4*P(4,4)+P(3,3)*P(4,4)=312 种。

（二）捆绑法与插空法

1.捆绑法：在解决排列问题的时候，有些问题需要相邻元素在一起，这种把相邻元素看作一个整体，再与其他元素一起排列，同时注意捆绑元素的内部排列的方法叫捆绑法。

例 2： 8 人排成一队

①甲乙必须相邻

②甲乙不相邻

③甲乙必须相邻且与丙不相邻

④甲乙必须相邻，丙丁必须相邻

⑤甲乙不相邻，丙丁不相邻

排列组合常见的计数方法

（二）捆绑法与插空法

分析：①甲乙必须相邻，就是把甲乙捆绑(甲乙可交换)和 7 人排列 P(7,7)*2

②甲乙不相邻，P(8,8)-P(7,7)*2。

③甲乙必须相邻且与丙不相邻，先求甲乙必须相邻且与丙相邻 P(6,6)*2*2；甲乙必须相邻且与丙不相邻 P(7,7)*2-P(6,6)*2*2

④甲乙必须相邻，丙丁必须相邻 P(6,6)*2*2

⑤甲乙不相邻，丙丁不相邻，P(8,8)-P(7,7)*2*2+P(6,6)*2*2

（二）捆绑法与插空法

例 3： 7 个不同的球放到 6 个不同的盒子中，要求每个盒子至少放一个球，一共有多少种方法？

解答：根据题目要求，则其中一个盒子必须得放 2 个，其他每个盒子放 1 个球，所以从 7 个球中挑出 2 个球看成一个整体，则有 C(7,2)，这个整体和剩下 5 个球放入 6 个盒子里，则有 P(6,6)。方法是 C(7,2)*P(6,6)。

（二）捆绑法与插空法

2.插空法：在解决对于某几个元素要求不相邻的问题时，先将其它元素排好，再将指定的不相邻的元素插入已排好元素的间隙或两端位置，从而将问题解决的方法叫插空法。

例 4：某人射击 8 枪，命中 4 枪，恰好有三枪连续命中，有多少种不同的情况？

分析：因为连续命中的三枪与单独命中的一枪不能相邻，因而这是一个插空问题。另外没有命中的之间没有区别，不必计数。即在四发空枪之间形成的 5 个空中选出 2 个的排列，即 P(5,2)。

排列组合常见的计数方法

（三）排除法

排除法：先计算中所有情况的答案，再把不符合条件的答案排除掉的方法叫排除法。

例 6： 三行三列共九个点，以这些点为顶点可组成多少个三角形？

分析：有些问题正面求解有一定困难，可以采用间接法。 所求问题的方法数=任意三个点的组合数-共线三点的方法数，

∴ 共 C(9,3)-8=76 种。

排列组合常见的计数方法

（三）排除法

排除法：先计算中所有情况的答案，再把不符合条件的答案排除掉的方法叫排除法。

例 7：正方体 8 个顶点中取出 4 个，可组成多少个四面体?

分析：所求问题的方法数=任意选四点的组合数-共面四点的方法数，

所以，共 C(8,4)-12=70-12=58 个。

排列组合常见的计数方法

（四）隔板法

隔板法：隔板法使用的前提是所有元素必须相同，然后需要把这些元素分成若干组，每组至少有一个元素的计数方法。

1.隔板法的基本题型

n 个相同元素，不同个 m 组，每组至少有一个元素；则只需在 n 个元素的 n-1 个间隙中放置 m-1 块隔板把它隔成 m 份，求共有多少种不同方法？其解题思路为：将 n 个相同的元素排成一行， n 个元素之间出现了（ n-1 ）个空档，现在我们用（ m-1 ）个“档板 ”插入（ n-1 ）个空档中，就把 n 个元素隔成有序的 m 份，每个组依次按组序号分到对应位置的几个元素（可能是 1 个、2 个、 3 个、 4 个、 ….），这样不同的插入办法就对应着 n 个相同的元素分到 m 组的一种分法，这种借助于这样的虚拟“档板 ”分配元素的方法称之为插板法。

排列组合常见的计数方法

（四）隔板法

例 8： 10 个名额分配到八个班，每班至少一个名额，问有多少种不同的分配方法?

分析： 把 10 个名额看成十个元素，在这十个元素之间形成的九个空中，选出七个位置放置档板，则每一种放置方式就相当于一种分配方式。因而共 36 种。

排列组合常见的计数方法

（四）隔板法

2.使用隔板法求不定方程的正整数解的个数

不定方程 x1 + x2 + … + xn = n (m. n∈N)正整数解(x1,x2,x3…,xn)的个数为 C(m-1 n-1)。

求解过程分析如下：n 可看作是 n 个 1(k 个 1 代表数值 k),1 与 1 之间有 n-1 个空位， 要保证是正整数解，即每个 xi (i=1, 2,……,m)位置上必须保证有一个 1，则只能在 1 与 1 之间的 n-1 个空位的相应位置上插入 m-1 个隔板(隔成 m 个 x)，第 i 个隔板前的两个隔板间的 1 的个数即表示 xi (紧靠第 i 个隔板前的 k 个 1 即表示 x=k)。所以从 n-1 个 1 与 1 之间的空位中选 m-1 个空位插人隔板即可解得不定方程解的个数，即 C(m-1,n-1)

（四）隔板法

2.使用隔板法求不定方程的正整数解的个数

不定方程 x1+x2+……+xm=n(m, n∈N,)非负整数解(x1, x2, …… xm)的个数为 C(n,n+m-1

= C(m-1,n+m-1)

求解过程分析如下：令 yi = xi +1 (i=1,2,……,m)，则 y1+y2+...+ym=n+m,所以不定方程 x1+x2+……+xm=n 的非负整数解的个数等于不定方程 y1 + y2 + …… + ym=n+m 的正整数解的个数，即 C(m- 1,n+m-1) = C(n, n+m-1) 。

可重复排列

从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个元素，但同一元素可以重复取出，排成一列，称为一个可重复排列。在作一个可重复排列时，如果元素 a 被取上几次，排列中它就出现几次，但同一元素的位置交换不能认为是不同排列。两个可重复排列相同当且仅当所取的元素相同并且同一元素取的次数相同，在排列中占的位置也相同。从 n 个元素中可重复地选取 m 个元素的可重复排列个数称为可重复排列种数。

比如： 由 1，2，3，4，5，6，7，8，9 可以组成多少个五位数？最高位可以是 1，2，3，4，5，6，7，8，9 中的任何一个，因而有 9 种确定最高位的方式；由于题目中没有限制数字不重复，即允许数字重复，因而次高位，一直到个位都各有 9 种确定的方式；

因此可以组成 $9\times9\times9\times9\times9=9^5$ (个) 五位数。

【课堂练习】

05 课堂练习

1.【NOIP2016】有 7 个一模一样的苹果，放到 3 个一样的盘子中，一共有（）种放法。

A. 7　　B. 8　　C. 21　　D. 3^7

2.【NOIP2017】甲、乙、丙三位同学选修课程，从 4 门课程中，甲选修 2 门，乙、丙各选修 3 门，则不同的选修方案共有（）种。

3.【NOIP2018】设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 7 个元素组成的子集数为 T，则 T/S 的值为（　　）。

A.5/32　　B.15/128　　C.1/8　　D.21/128

4.【NOIP2008】书架上有 4 本不同的书 A、B、C、D。其中 A 和 B 是红皮的，C 和 D 是黑皮的。把这 4 本书摆在书架上，满足所有黑皮的书都排在一起的摆法有_____种。满足 A 必须比 C 靠左，所有红皮的书要摆放在一起，所有黑皮的书要摆放在一起，共有_____种摆法。

5.【NOIP2008】书架上有 21 本书，编号从 1 到 21，从其中选 4 本，其中每两本的编号都不相邻的选法一共有_____种。

05 课堂练习

6.【NOIP2017】将 7 个名额分给 4 个不同的班级，允许有的班级没有名额，有（　）种不同的分配方案。

A. 60　　B. 84　　C. 96　　D. 120

7.【NOIP2011】每份考卷都有一个 8 位二进制序列号。当且仅当一个序列号含有偶数个 1 时，它才是有效的。例如，00000000、01010011 都是有效的序列号，而 11111110 不是。那么，有效的序列号共有_____个。

8.【NOIP2012】在全国赛期间，主办单位为了欢迎来自全国各地的选手，举行了盛大的晚宴。在第十八桌，有 5 名大陆选手和 5 名港澳选手共同进膳。为了增进交流，他们决定相隔就坐，即每个大陆选手左右相邻的都是港澳选手、每个港澳选手左右相邻的都是大陆选手。那么，这一桌共有_____种不同的就坐方案。注意：如果在两个方案中，每个选手左边相邻的选手均相同，则视为同一个方案。

9.【NOIP2013】7 个同学围坐一圈，要选 2 个不相邻的作为代表，有_____种不同的选法。

10.【NOIP2014】由数字 1,1,2,4,8,8 所组成的不同的四位数的个数是_____。

05 课堂练习

11.【NOIP2016】从一个 4×4 的棋盘（不可旋转）中选取不在同一行也不在同一列上的两个方格，共有_____种方法。

12.【NOIP2018】方程 a*b = (a or b) * (a and b)，在 a，b 都取 [0，31] 中的整数时，共有_____组解。（*表示乘法；or 表示按位或运算；and 表示按位与运算）

13.【NOIP2009】小陈现有 2 个任务 A，B 要完成，每个任务分别有若干步骤如下：A=a1->a2->a3，B=b1->b2->b3->b4->b5。在任何时候，小陈只能专心做某个任务的一个步骤。但是如果愿意，他可以在做完手中任务的当前步骤后，切换至另一个任务，从上次此任务第一个未做的步骤继续。每个任务的步骤顺序不能打乱，例如……a2->b2->a3->b3……是合法的，而……a2->b3->a3->b2……是不合法的。小陈从 B 任务的 b1 步骤开始做，当恰做完某个任务的某个步骤后，就停工回家吃饭了。当他回来时，只记得自己已经完成了整个任务 A，其他的都忘了。试计算小陈饭前已做的可能的任务步骤序列共有种。

05 课堂练习

14.【NOIP2009】某个国家的钱币面值有 1，7，7^2，7^3 共计四种，如果要用现金付清 10015 元的货物，假设买卖双方各种钱币的数量无限且允许找零，那么交易过程中至少需要流通张钱币。

15.【NOIP2002】将 N 个红球和 M 个黄球排成一行。例如：N=2,M=3 可得到以下 6 种排法：
红红黄黄黄 红黄红黄黄 红黄黄红黄 黄红红黄黄 黄红黄红黄 黄黄黄红红
问题：当 N=4,M=3 时有多少种不同排法?(不用列出每种排法)

《信息学奥赛一本通·初赛真题解析》

第三章 数学问题

第3节 特殊数列

目录

01 Catalan数

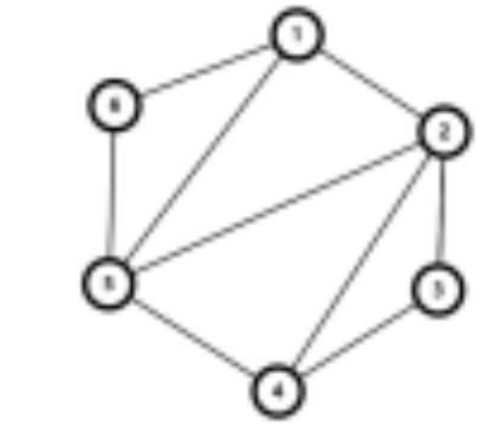
在一个有 n+2 条边的凸多边形中，可以画出 n-1 条不相交的对角线将多边形分为 n 个三角形，设所有满足条件的方案数为 hn，定义 h0=1，则

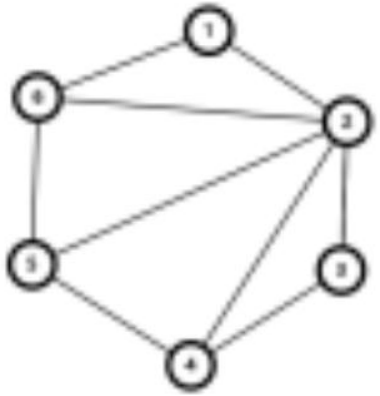
$$h_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} h_i h_{n-1-i} \quad (h_0 = 1, h_1 = 1)$$

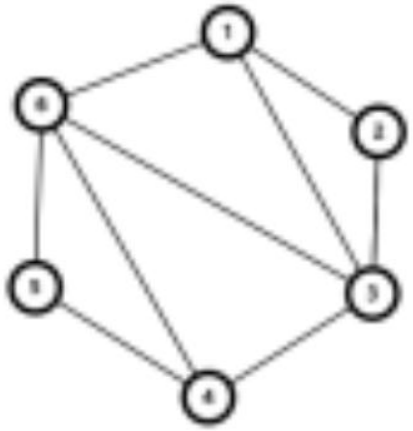
其前几项为（从第 0 项开始）：1，1，2，5，14，42.....

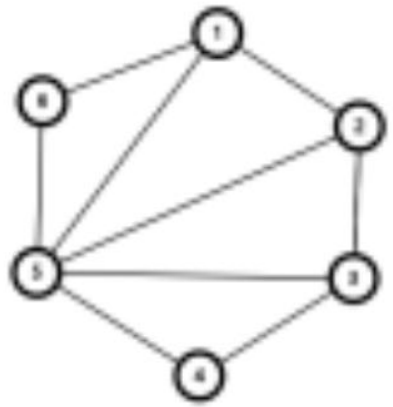
这个式子是如何得到的呢？我们简单推演一下，比如：当 n=4 时：凸多边形为凸六边形，有 3 条不相交的对角线，其中四种图形如下图所示：

01 Catalan数









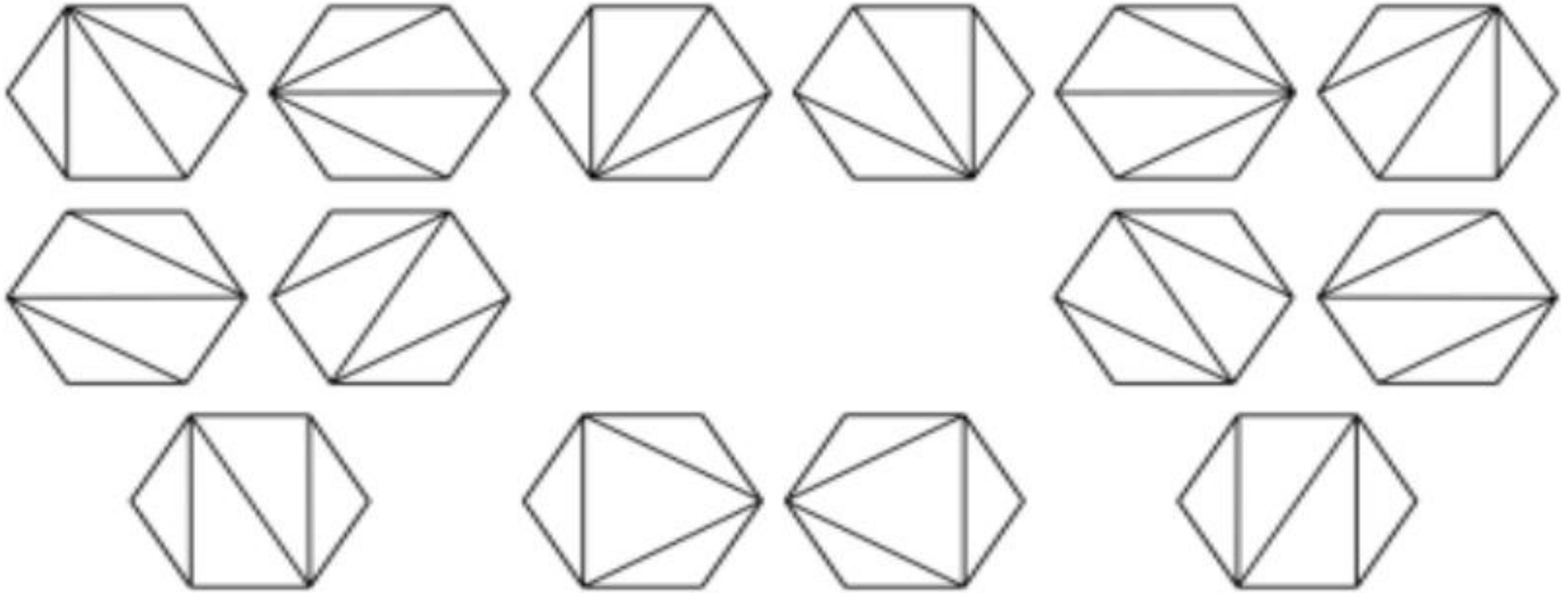
Catalan数

由上图可知，每次在连接完一条不相交的对角线后，可以看出这条对角线把当前图分割成了 2 部分。设其中一块有 k+2 条边（这样就可以得到 k 个三角形）。同理，另一块图形可得到 n-1-k 个三角形。由乘法原理，这样剖分的方案数就为 h(n) * (h-1-k) （其中 n 为三角形的总数量）

显然，k 可以从 0 一直变化到 n-1 （注意要考虑与边界情况，并注意到这里的不会重复计数）。

具体的方案数为 h4=h0*h3+h1*h2+h2*h1+h3*h0=14。下图是具体的 14 种方案。

Catalan数

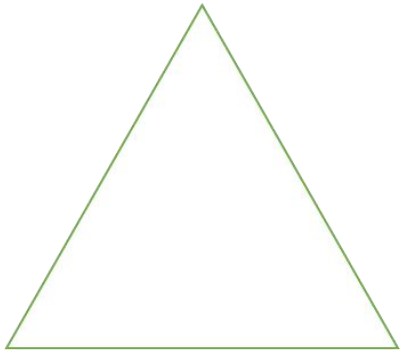


Catalan数

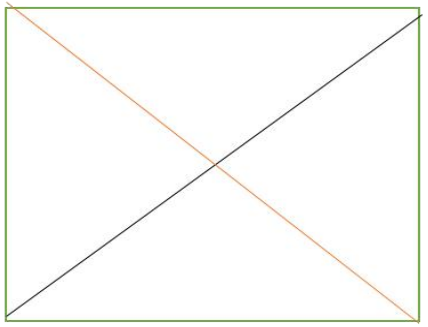
以三角形为例，我们初始化 h(0) = 1（注：h 为卡特兰数函数），那三角形（n=1）对应的 h(1) = h(0)*h(0) = 1。三角形划分成三角形的方案个数也为 1（它本身），然后我们通过三角形推出四边形（n=2），四边形可以通过连接一条对角线划分成两个三角形，因为有两条对角线，划分方案有两种。此时 h(2) = h(0) * h(1) + h(1) * h(0) = 2。

我们可以通过三角形和四边形推出五边形 (n=3) 的划分方案个数。我们定住五边形的五个顶点以其中任意两个顶点为三角形的两个顶点，再任意找出其他顶点中的任意一个顶点为三角形的第三个顶点，我们发现可以划分成两种【一个三角形和一个四边形】，一种【三个三角形】，故而递归下去计算 h(3) = h(0) * h (2) + h(1) * h(1) + h(2) * h(0) = 5，以此类推 h(n) = h(0) * h(n-1) +…… + h(n-1) * h(0)。

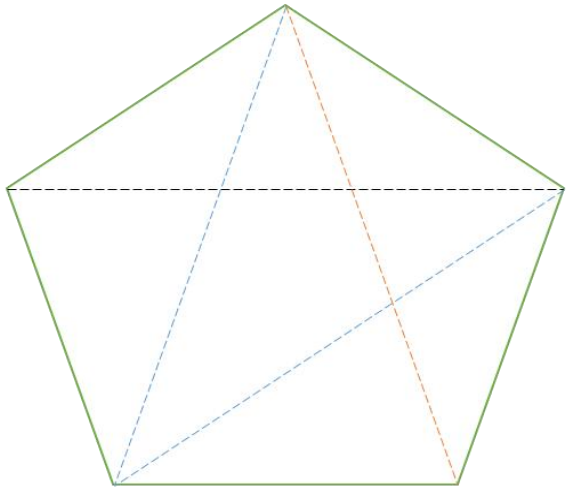
01 Catalan数



三角形：一种方案



四边形：两种方案（黑色一种分成两个，橙色一种分成两个，总计两种方案）。



五边形：五种方案（黑色和橘色都将五边形分割成一个三角形和一个四边形，【两种这种方案】，其中四边形又可分成两种方案，现在是四种，再加上两条蓝色将整个五边形分割成三个三角形的方案，共计5种）

Catalan数列的应用

（一）括号序列：给出一个有 n 个运算符 n+1 个运算数的算式，要求在算式中任意添加括号，那么本质不同的运算顺序有多少种？

分析：考虑最后一个运算的符号，它的左边有 k 个运算符，右边则有 n-1-k 个运算符，由乘法原理可知这个问题满足递推关系（1），于是答案是 Catalan 数列。

（二）有 2n 个人排队进入剧场，入场费 50 元，每人都带着一张 50 元或 100 元的钞票，剧院售票处没有任何零钱，有多少种情况满足无论什么时候售票处都能找的开零钱。

（三）一个 n*n 的网格图，从左下走到右上，每次只能向上或向右走，不能走到左下到右上的对角线的上方，一共有多少种走法。

分析：（二）（三）两个问题本质是由 n 个+1 和 n 个-1 组成的序列中任意部分和都非负的序列总数（模型的转换希望读者认真思考），于是这两个问题的答案也是 Catalan 数列。

Catalan数列的应用

（一）括号序列：给出一个有 n 个运算符 n+1 个运算数的算式，要求在算式中任意添加括号，那么本质不同的运算顺序有多少种？

分析：考虑最后一个运算的符号，它的左边有 k 个运算符，右边则有 n-1-k 个运算符，由乘法原理可知这个问题满足递推关系（1），于是答案是 Catalan 数列。

（二）有 2n 个人排队进入剧场，入场费 50 元，每人都带着一张 50 元或 100 元的钞票，剧院售票处没有任何零钱，有多少种情况满足无论什么时候售票处都能找的开零钱。

（三）一个 n*n 的网格图，从左下走到右上，每次只能向上或向右走，不能走到左下到右上的对角线的上方，一共有多少种走法。

分析：（二）（三）两个问题本质是由 n 个+1 和 n 个-1 组成的序列中任意部分和都非负的序列总数（模型的转换希望读者认真思考），于是这两个问题的答案也是 Catalan 数列。

Catalan数列的应用

（四）有 n 个结点的形态不同的二叉树一共有多少棵。

分析请读者自行完成，这个问题的答案也满足递推关系（1）

（五）出栈序列统计，有 n 个数和一个栈，本质不同的合法序列一共有多少种。

提示：将一次入栈操作视为+1，一次出栈操作视为-1，剩余的分析请读者自行完成。

第二类斯特林数

（一）第二类斯特林数定义

第二类斯特林数 S(n,k)是将 n 个元素的集合划分成 k 个不可辨认的非空盒子的划分的个数。注意，这里的不可辨认是指不能把一个盒子与另一个盒子分辨开，它们看起来都一样。

下面给出第二类斯特林数的递推关系和证明：

S(n,k) = k*S(n-1,k) + S(n-1,k-1)；S(n,1)=1（n≥1），S(n,n)=1。

上面的递推式可以用组合证明：一方面，如果将元素 n 单独拿出来划分成 1 个集合，那么方法数是 S(n-1,k-1)；另一方面，如果元素 n 所在的集合不止一个元素，那么可以先将剩下的 n-1 个元素划分好了以后再选一个集合把 n 放进去，方法数是 k*S(n-1,k)。

第二类斯特林数

（一）第二类斯特林数定义

由第二类斯特林数的定义可知，第二类斯特林数表示把 n 个不同的数划分为 m 个集合的方案数，要求不能为空集，写作 S(n, m)。划分集合不必考虑排列次序。考虑 S(n, m) 可以由以下两项转移得到：

1.S(n-1, m-1)，将 n-1 个不同元素划分为 m-1 个集合，则第 n 个元素必须单独放入第 m 个集合。方案数：S(n-1, m-1)。

2.(n-1, m)，将 n-1 个不同元素已经划分为 m 个集合，则第 n 个元素可以放在 m 个集合中任意一个里面。方案数：S(n-1, m)*m。

由上可以得出递推式：S(n, m)=S(n-1, m-1)+S(n-1, m)*m。

03 第二类斯特林数

（一）第二类斯特林数定义

3.在各种不同的盒子中放球的模型的方案数：

（1）n 个不同的球放入 m 个相同的盒子中，不允许盒子为空:方案数=S(n, m)，这是第二类斯特林数的定义。

（2）n 个不同的球放入 m 个不同的盒子中，不允许盒子为空:方案数=S(n,m) *m!,盒子有区别，乘上盒子所有排列即可。

（3）n 个不同的球放入 m 个相同的盒子中，允许盒子为空:

方案数=$\sum_{i=0}^{m}$ S(n,i)，枚举非空盒子个数即可。

（4） n 个不同的球放人 m 个不同的盒子中， 允许盒子为空:

方案数=$\sum_{i=0}^{m} A(i,m)$* S(n, i)，因为盒子不同，所以要乘上排列数。

第二类斯特林数

（一）第二类斯特林数定义

例题：盒子与球

有 3 个一模一样的盒子和 6 个不同颜色的球，将这些球放到 3 个盒子里并且保证每个盒子里至少有 1 个球，求放置的方案总数。

答案：第二类斯特林数 S(6,3)。

【课堂练习】

04 课堂练习

1.【NOIP2018】关于 Catalan 数 Cn = (2n)! / (n + 1)! / n!，下列说法中错误的是（ ）。

A. Cn 表示有 n + 1 个结点的不同形态的二叉树的个数。

B. Cn 表示含 n 对括号的合法括号序列的个数。

C. Cn 表示长度为 n 的入栈序列对应的合法出栈序列个数。

D. Cn 表示通过连接顶点而将 n + 2 边的凸多边形分成三角形的方法个数。

2.【NOIP2015】结点数为 5 的不同形态的二叉树一共有_____种。(结点数为 2 的二叉树一共有 2 种：一种是根结点和左儿子，另一种是根结点和右儿子。)

3.【NOIP2014】把 M 个同样的球放到 N 个同样的袋子里，允许有的袋子空着不放，问共有多少种不同的放置方法？(用 K 表示)。

例如：M = 7，N = 3 时，K = 8；在这里认为(5,1,1)和(1,5,1)是同一种放置方法。

问：M = 8，N = 5 时，K = _____。

04 课堂练习

4.【NOIP2007】（子集划分）将 n 个数{1，2，…， n}划分成 r 个子集。每个数都恰好属于一个子集，任何两个不同的子集没有共同的数，也没有空集。将不同划分方法的总数记为 S(n,r)。例如， S(4,2)=7，这 7 种不同的划分方法依次为 {(1),(234)}, {(2),(134)}, {(3),(124)}, {(4),(123)}, {(12),(34)}, {(13),(24)}, {(14),(23)}。当 n=6,r=3 时，S(6,3)= _____。 （提示：先固定一个数，对于其余的 5 个数考虑 S(5,3) 与 S(5,2)，再分这两种情况对原固定的数进行分析）。

《信息学奥赛一本通·初赛真题解析》

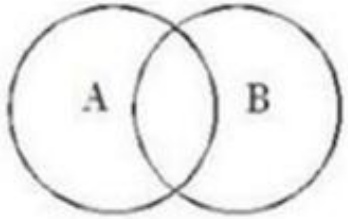
第三章 数学问题

第4节 容斥原理

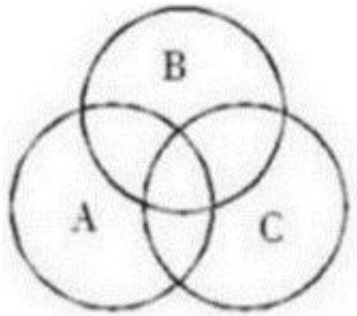
目录

01 集合间的容斥关系

(一)两集合的容斥关系公式：$A \cup B = A + B - A \cap B$



（二）三个集合的容斥关系公式：$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$



(三)容斥原理

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i,j:i\neq j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k:i\neq j\neq k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots\cdots \pm |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

减2个的交　　加3个的交　　减4个的交.....

$$\cup_{i=1}^{n} s_i| = \sum_{i=1}^{n} s_i + (-1)^1 * \sum_{1\le i<j\le n}|s_i \cap s_j| + (-1)^2 \sum_{1\le i<j<k\le n}|s_i \cap s_j \cap s_k| + \ldots +$$

$$(-1)^{n+1} * |s_1 \cap \ldots\ldots \cap s_j|$$

01 集合间的容斥关系

例 1：有多少能被 3 或 5 或 7 整除的小于 1000 的正整数？

分析：设A_1、A_2、A_3分别表示被 3 整除、被 5 整除、被 7 整除的数构成的集合，根据公式，

$$\left|\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right| = \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{i\neq j} |A_i \cap A_j| + \sum |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

于是答案是

$$\left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{15}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{21}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1000}{35}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{105}\right\rfloor$$

$$= 543$$

集合间的容斥关系

例 2： 在 1 到 300 的整数中，计算：

（1）能被 3 或被 5 或被 7 整除的数有多少个？

（2）不能被 3、5、7 中的任何一个整除的数有多少个？

（3）能被 3 整除，但不能被 5、7 中的任何一个整除的数有多少个？

（4）与 300 互质的数有多少个？

集合间的容斥关系

解：设 $S=\{1,2,\ldots,300\}$，A3，A5，A7 分别表示 S 中 3，5，7 的倍数集，则 $|A_3|=100$，$|A_5|=60$，$|A_7|=42$，$|A_3\cap A_5|=20$，$|A_3\cap A_7|=14$，$|A_5\cap A_7|=8$，$|A_3\cap A_5\cap A_7|=2$，

于是（1）$|A_3\cup A_5\cup A_7|=162$；

（2）$300-162=138$；

（3）$|A_3|-|A_3\cap A_5|-|A_3\cap A_7|+|A_3\cap A_5\cap A_7|=100-20-14+2=68$；

（4）$\because 300=2^2\times 3\times 5^2$，$\therefore$300-S 中 2，3，5 的倍数的个数即为所求.

$\therefore$300-S 中 2，3，5 的倍数的个数即为所求。

02 错位排列问题

（一）错位排列的定义

对于一个 1……n 的任意排列，有一种情况是第 i 个位置上的数不是 i 对任意 i 都成立，例如 n=3 时，有且仅有排列 231 和 312 是满足要求的，这样的排列被称为错位排列。

现在的问题是，能否对于任意 n，给出错位排列的个数？

分析：利用容斥原理。设A_i表示 i 这个数在原来位置上的排列的集合，则错位排列的个数

$$D_n = n! - \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$$

错位排列问题

（一）错位排列的定义

现在我们来算$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$，先算$\sum|A_i|$，因为有 1 个数在固定的位置上，有 C(n,1)种情况，对于每一种情况，剩下的 n-1 个数任意排列，于是有 C(n,1)*(n-1)!=n!种情况。再算$\sum|A_i \cap A_j|$，因为有 2 个数在固定的位置上，有 C(n,2)种情况，对于每一种情况，剩下 n-2 个数任意排列，于是有 C(n,2)*(n-2)!=n!/2 种情况。

一般地，因为有 k 个数在固定的位置上，另外(n-k)个数任意排列，所以

$$\sum|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_s} \cap \dots\dots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} * (n-k)! = \frac{n!}{k! * (n-k)!} * (n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

综上，由容斥原理，我们可以得到错位排列的公式

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n * \frac{1}{n!}\right)$$

错位排列问题

（二）错位排列的递推关系

n 个元素的错排记为 D(n)，分为两个步骤：

1.把第 n 个元素放在一个位置，一共有 n-1 种方法，比如放在位置 k 处；

2.放编号为 k 的元素，这时有两种情况：(1)把它放到位置 n，那么剩下 n-2 个元素的错排就有 D(n-2)种方法；(2)第 k 个元素不把它放到位置 n，这时对于这 n-1 个元素的错排，有 D(n-1)种方法。

综上得到 D(n)=(n-1)*[D(n-2) + D(n-1)]。特殊地，D(1)=0，D(2)=1。

【课堂练习】

03 课堂练习

1.【CSP-S/2019】一次期末考试，某班有 15 人数学得满分，有 12 人语文得满分，并且有 4 人语、数都是满分，那么这个班至少有一门得满分的同学有多少人？（　）。

A．23　　B．21　　C．20　　D．22

2.【NOIP2015】在 1 和 2015 之间(包括 1 和 2015 在内)不能被 4、5、6 三个数任意一个数整除的数有_____个。

3.【NOIP1998】某班有 50 名学生，每位学生发一张调查卡，上写 a，b，c 三本书的书名，将读过的书打✓，结果统计数字如下： 只读 a 者 8 人；只读 b 者 4 人；只读 c 者 3 人；全部读过的有 2 人；读过 a，b 两本书的有 4 人；读过 a，c 两本书的有 2 人；读过 b，c 两本书的有 3 人；（1）读过 a 的人数是____ ；（2）一本书也没有读过的人数是____ 。

03 课堂练习

4.【NOIP2002】在书架上放有编号为1，2，...，n的n本书。现将n本书全部取下然后再放回去，当放回去时要求每本书都不能放在原来的位置上。例如：n = 3时：

原来位置为：1 2 3；

放回去时只能为：3 1 2 或 2 3 1 这两种。

问题：求当n = 5时满足以上条件的放法共有多少种？（不用列出每种放法）

5.【NOIP2015】重新排列 1234 使得每一个数字都不在原来的位置上，一共有_____种排法。

《信息学奥赛一本通·初赛真题解析》

第三章 数学问题

第5节 抽屉原理

目录

第一抽屉原理

原理 1：把 n+1 个物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里的东西不少于 2 件。

原理 2：把 mn+1(n 不为 0)个物体放到 n 个抽屉里面，则至少有一个抽屉里面不少于 m+1 的物体。

原理 3：把无穷多件物体放入 n 个抽屉，则至少有一个抽屉里有无穷个物体。

第二抽屉原理

把(mn-1)个物体放入 n 个抽屉中，其中必有一个抽屉不多于(m-1)个物体。

例如将 3*5-1=14 个物体放入 5 个抽屉中，则必定有一个抽屉中的物体数目少于 3-1=2。总结：推广来说，把 n 个物体放进 m 个盒子，那么至少有一个盒子包含 ceil(n/m)个或更多的物体。

抽屉原理的简单应用

例题【NOIP2010】记 T 为一队列，初始时为空，现有 n 个总和不超过 32 的正整数依次入列。如果无论这些数具体为何值，都能找到一种出队的方式，使得存在某个时刻队列 T 中的数之和恰好为 9，那么 n 的最小值是_____。

03 抽屉原理的简单应用

分析：组合数学题目的一种常见思路是先猜测答案再证明。试图通过鸽巢原理猜出答案。设 S_i 表示前 i 个数的和，并规定 $S_0=0$，事实上原题要求出最小的 n，使得存在 $0 \le i < j \le n$ 满足 $S_j = S_i + 9$。于是我们可以把 S 数组看做鸽子，用不能同时取的一组（即差为 9）的集合构造笼子，构造方法如下：一共有 18 个集合按如下方式选取，{0,9}、{1,10}、{2,11}、{3,12}、{4,13}、{5,14}、{6,15}、{7,16}、{8,17}、{18,27}、{19,28}、{20,29}、{21,30}、{22,31}、{23,32}、{24}、{25}、{26}，根据题意，我们一旦在某个集合中取了两个元素，那么一定存在某个时刻队列 T 中数之和恰好为 9，于是由鸽巢原理我们可以知道 n=18（S 数组有 19 个元素）一定满足条件。

下面我们来证明 n=17 不可行，事实上只要构造出一组不合法的序列即可。可以选择如下不合法的序列：1 1 1 1 1 1 1 1 10 1 1 1 1 1 1 1 1。

综上：原问题所求的 n 的最小值为 18。

【课堂练习】

04 课堂练习

1.【CSP-J/2019】一副纸牌除掉大小王有 52 张牌，四种花色，每种花色 13 张。假设从这 52 张牌中随机抽取 13 张纸牌，则至少（　）张牌的花色一致。

A．4　　B．2　　C．3　　D．5

2.【NOIP2012】如果平面上任取 n 个整点(横纵坐标都是整数)，其中一定存在两个点，它们连线的中点也是整点，那么 n 至少是_____。

3.【NOIP2010】记 T 为一队列，初始时为空，现有 n 个总和不超过 32 的正整数依次入列。如果无论这些数具体为何值，都能找到一种出队的方式，使得存在某个时刻队列 T 中的数之和恰好为 9，那么 n 的最小值是_____。

《信息学奥赛一本通·初赛真题解析》

第三章 数学问题

第6节 概率与期望

目录

01 几种特殊事件的概率

（一）等可能事件的概率，如果一次试验中共有 n 种等可能出现的结果，其中事件 A 包含的结果有 m 种，那么事件 A 的概率为 p(A)= $\frac{m}{n}$.

（二）互斥事件：不可能同时发生的两个事件，叫做互斥事件，也叫不相容事件。如果事件 A1，A2，…，An 彼此互斥，那么 A1，A2，…，An 中至少有一个发生的概率为 p(A1+A2+…+An)= p(A1)+p(A2)+…+p(An)。

（三）对立事件：事件 A，B 为互斥事件，且必有一个发生，则 A，B 叫对立事件，记 A 的对立事件为 $\overline{A}$。由定义知 p(A)+p($\overline{A}$)=1。

几种特殊事件的概率

（四）相互独立事件：事件 A（或 B）是否发生对事件 B（或 A）发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

相互独立事件同时发生的概率：两个相互独立事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积。即 p(A•B)=p(A)•p(B).若事件 A1，A2，…，An 相互独立,那么这 n 个事件同时发生的概率为 p(A1•A2• … •An)=p(A1)•p(A2)• … •p(An)。

（五）独立重复试验:若 n 次重复试验中，每次试验结果的概率都不依赖于其他各次试验的结果,则称这 n 次试验是独立的。

独立重复试验的概率:如果在一次试验中，某事件发生的概率为 p，那么在 n 次独立重复试验中，这个事件恰好发生 k 次的概率为 pn(k)=C_n^k •pk(1-p)n-k。

概率计算中的几个常用公式

(一)$P(A-B)=P(A)-P(AB)$,当 $B\subseteq A$ 即 B 包含在 A 中时有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,$P(A)\geq P(B)$

(二)对任意两个事件有：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(三)A1、A2 为不相容事件，$P(A1\cup A2)=P(A1)+P(A2)$

数学期望

数学期望又称均值，亦简称期望，是试验中所有可能结果的概率乘以其结果的总和，是最基本的数学特征之一。它反映随机变量平均取值的大小。

需要注意的是，期望值并不一定等同于常识中的“期望”，“期望值”也许与每一个结果都不相等。期望值是该变量输出值的平均数，并不一定包含于变量的输出值集合里。

设 P(x) 是一个离散概率分布，代表 x 发生的概率，自变量 x 的取值范围为 {x1,x2,...,xn}。其期望被定义为：

$$E(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(x_k)$$

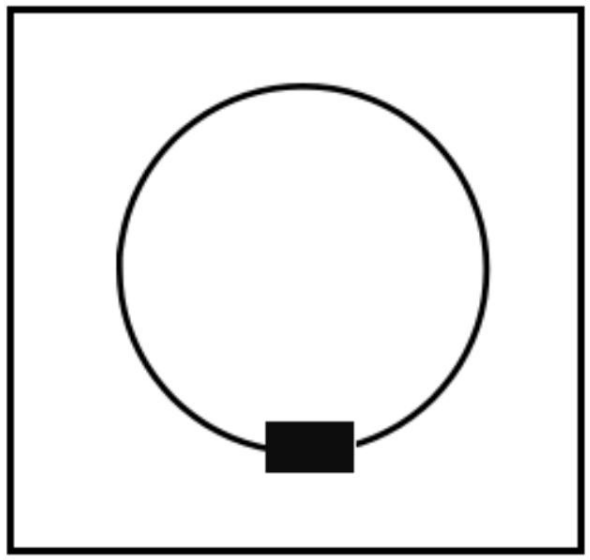
【课堂练习】

04 课堂练习

1.【NOIP2017】小明要去南美洲旅游，一共乘坐三趟航班才能到达目的地，其中第 1 个航班准点的概率是 0.9，第 2 个航班准点的概率为 0.8，第 3 个航班准点的概率为 0.9。如果存在第 i 个（i=1,2）航班晚点，第 i+1 个航班准点，则小明将赶不上第 i+1 个航班，旅行失败；除了这种情况，其他情况下旅行都能成功。请问小明此次旅行成功的概率是（）。

A. 0.5　　B. 0.648　　C. 0.72　　D. 0.74

2.【NOIP2017】欢乐喷球：儿童游乐场有个游戏叫“欢乐喷球”，正方形场地中心能不断喷出彩色乒乓球，以场地中心为圆心还有一个圆形轨道，轨道上有一列小火车在匀速运动，火车有六节车厢。假设乒乓球等概率落到正方形场地的每个地点，包括火车车厢。小朋友玩这个游戏时，只能坐在同一个火车车厢里，可以在自己的车厢里捡落在该车厢内的所有乒乓球，每个人每次游戏有三分钟时间，则一个小朋友独自玩一次游戏期望可以得到（）个乒乓球。假设乒乓球喷出的速度为 2 个/秒，每节车厢的面积是整个场地面积的 1/20。



A. 60　　B. 108　　C. 18　　D. 20

04 课堂练习

3.【NOIP2017】一家四口人，至少两个人生日属于同一月份的概率是（）（假定每个人生日属于每个月份的概率相同且不同人之间相互独立）。

A. 1/12　　B. 1/144　　C. 41/96　　D. 3/4

4.【NOIP2018】假设一台抽奖机中有红、蓝两色的球，任意时刻按下抽奖按钮，都会等概率获得红球或蓝球之一。有足够多的人每人都用这台抽奖机抽奖，假如他们的策略均为：抽中蓝球则继续抽球，抽中红球则停止。最后每个人都把自己获得的所有球放到一个大箱子里，最终大箱子里的红球与蓝球的比例接近于（ ）。

A. 1 : 2　　B. 2 : 1　　C. 1 : 3　　D. 1 : 1

5.【NOIP2013】现有一只青蛙，初始时在 n 号荷叶上。当它某一时刻在 k 号荷叶上时，下一时刻将等概率地随机跳到 1，2，…，k 号荷叶之一上，直至跳到 1 号荷叶为止。当 n = 2 时，平均一共跳 2 次；当 n = 3 时，平均一共跳 2.5 次。则当 n = 5 时，平均一共跳_____次。

《信息学奥赛一本通·初赛真题解析》

第三章 数学问题

第7节 离散数学

目录

逻辑运算

（一）常用的逻辑运算符

1．非：　！逻辑非，是逻辑运算中的一种，就是指本来值的反值。比如我们定义一个布尔型变量 a，它的初值为 true，！ a 的值就变成了 false，所以！ 1100 的值为 0011。

2．与：& 逻辑与，比如 1001 & 1100，就是按位相与，与运算只要都是 1 的进行运算结果才是 1，所以那两个数逻辑与的结果是 1000。

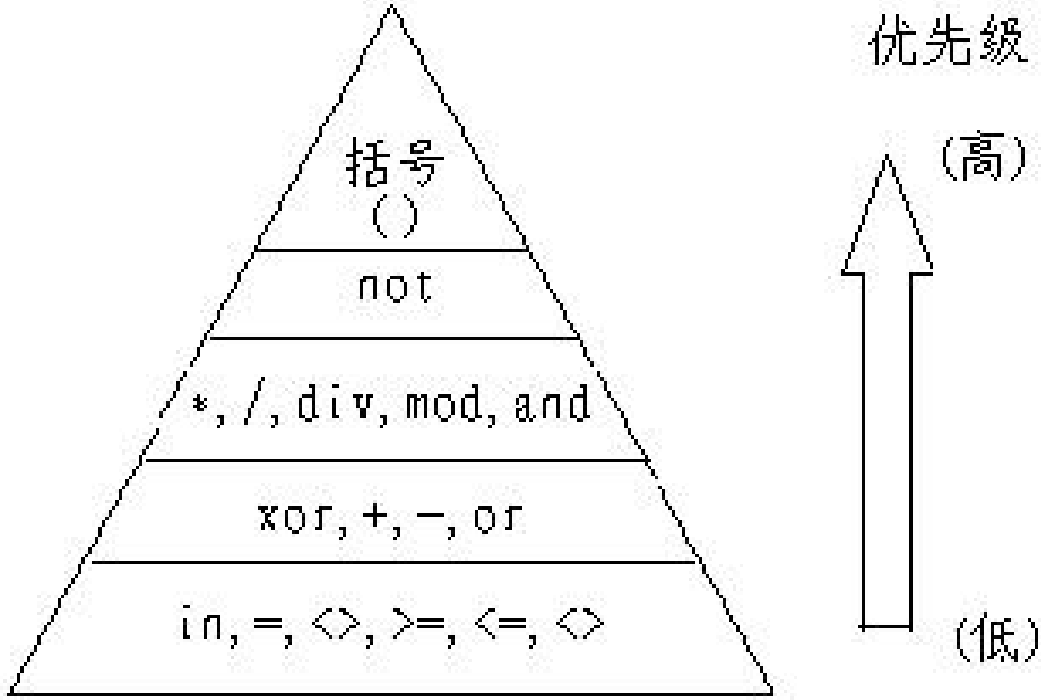
3．或：|，逻辑或，比如 1001|1100，就是按位相或，或运算只要参与运算的有 1，结果对应位就是 1，所以那两个数逻辑或的结果是 1101。

4.异或：^，异或运算，比如 1001^1100，就是按位异或，异或运算只要参与运算的两个数对应位上的数不一样结果就是 1，否则为 0，所以那两个数异或的结果是 0101。

逻辑运算

(二)运算优先级比较

括号 >非 >与 > 或、异或（ 或和异或是同级别的），如果加入加减乘除，就是以下这样：



逻辑运算

(二)运算优先级比较

例题 1. 若 A=True，B=False，C=True，D=False，以下逻辑运算表达式真的有（　　）。

A.（A∧B）∨（C∧D ∨¬A）

B.（(¬A ∧ B）∨ C）∧ ¬B

C.（B∨C∨D）∨D∧A

D. A ∧（D ∨¬C）∧B

逻辑运算

(二)运算优先级比较

题解：一个个算结果，比如 A 选项（A∧B）∨（C∧D∨¬A），根据运算级的比较，我们可以定下运算的顺序，然后按运算顺序计算结果。注意，这类题是有个小技巧的。比如 A 选项可以先看中间的∨，为什么呢？因为∨的左右有一边是真就行，可以不去看另外一边。

A 选项的结果是：（A∧B）∨（C∧D ∨¬A），（A∧B）=假，（C∧D ∨¬A）中 C∧D =假，¬A=假，所以（C∧D ∨¬A）=假。于是 A 选项可以简写为：假∨（假 ∨假）= 假。

B 选项的结果是：（（¬A ∧ B）∨ C）∧¬B，如果¬B 是假那么就可以不去看前面的（（¬A ∧ B）∨ C），可惜的是¬B 是真，那么就要看（（¬A ∧ B）∨ C），发现 C 是真，所以不看（¬A ∧ B），于是 B 选项可以简写为：（？ ∨ 真）∧ 真 = 真。

C 选项的结果是：（B∨C∨D）∨D∧A ，D∧A=假，所以不得不看前面部分（B∨C∨D），只要 BCD 有一个是真，那么（B∨C∨D）=真，而容易发现 C=true。所以 C 选项可以简写为：真∨假 = 真。

D 选项的结果是：A ∧（D ∨¬C）∧B，我们很容易发现 D 选项的特殊结构为 ？∧？∧？，三个？有一个是假，那么 D 为假，A 和 B 不用计算便可看出，所以先发现 B=假，所以 D=假。

逻辑运算

(二)运算优先级比较

例题 2. 计算 23 +2 | 2 & 5 * 3 - 6 ^ 5=（　　）。

题解：数字也有逻辑运算，当然也可以混合加减乘除。

这里举例说明运算的操作：

&: 22 & 5	|: 22 | 5
22: 10110 ⟶ 10110	22: 10110 ⟶ 10110
5: 101 （缺位补零） 00101	5: 101 （缺位补零） 00101
（垂直对应两位 & 运算） 00100 = 4	（垂直对应两位 | 运算） 10111 = 23

集合运算

集合运算有以下四种，分别是：**并运算：∪；交运算：∩；差运算：－；非运算：∶（区别于逻辑非运算：¬），假设有 A 和 B 两个集合，A={a，b，c},B={b，d，e},我们以集合 A 和 B 为例，进行以下集合运算。**

并运算：比如 A∪B，就是 A 集合和 B 集合里所有元素组成一个新集合，重复的元素只保留一份。A∪B –>{a，b，c，b，d，e}–>{a，b，c，d，e}。

交运算：比如 A∩B，就是同时在 A 集合和 B 集合的元素组成一个新集合。A∩B –>{b}。

差运算：比如 A－B，就是 A 集合删去 A∩B 里的元素后组成一个新集合。A－B –>{a，c}。

非运算：非运算是单目运算符，比如∶A。非运算有个特殊的要求：一定要说明全集。那么∶A 就全集删去 A 集合中的元素，剩下的全集中的元素组成一个新集合。比如 C 是全集，C 集合中的元素为 C={a,b,c,d,e,f,g},那么非 A 即∶A= {d，e，f，g}。

【课堂练习】

03 课堂练习

1.【NOIP2008】设A=true，B=false，C=true，D=false，以下逻辑运算表达式值为真的是（ ）。

A. (A∧B)∨(C∧D∨¬A)　　B. ((¬A∧B)∨C)∧¬D

C. (B∨C∨D)∧D∧A　　D. A∧(D∨¬C)∧B

2.【NOIP2008】在 C++程序中，表达式 200 | 10 的值是（ ）

A. 20　　B. 1　　C. 220　　D. 202

3.【NOIP2010】以下逻辑表达式的值恒为真的是（ ）。

A.P∨（¬P∧Q）∨(¬P∧¬Q)　　B.Q∨（¬P∧Q）∨（P∧¬Q）

C.P∨Q∨（P∧¬Q）∨（¬P∧Q）　　D.P∨¬Q∨（P∧¬Q）∨(¬P∧¬Q)

4.【NOIP2013】逻辑表达式( )的值与变量 A 的真假无关。

A.(A ∨ B) ∧ ¬A　　B.(A ∨ B) ∧ ¬B

C.(A ∧ B) ∨ (¬A ∧ B)　　D.(A ∨ B) ∧ ¬A ∧ B

03 课堂练习

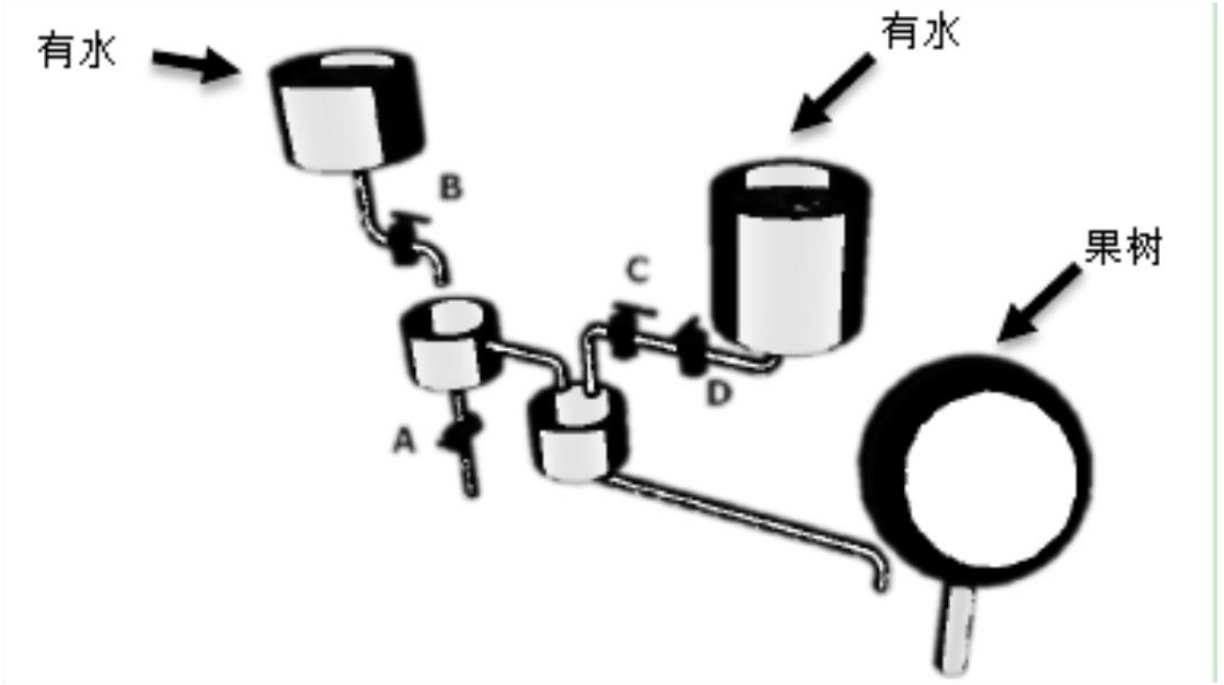
5.【NOIP2012】本题中，我们约定布尔表达式只能包含 p，q，r 三个布尔变量，以及“与”(∧)、“或”(∨)、“非”(¬)三种布尔运算。如果无论 p,q,r 如何取值，两个布尔表达式的值总是相同，则称它们等价。例如，(p∨q)∨r 和 p∨(q∨r)等价，p∨¬p 和 q∨¬q 也等价；而 p∨q 和 p∧q 不等价。那么，两两不等价的布尔表达式最多有_____个。

6.【NOIP2018】甲乙丙丁四人在考虑周末要不要外出郊游。

已知①如果周末下雨，并且乙不去，则甲一定不去；②如果乙去，则丁一定去；③如果丙去，则丁一定不去；④如果丁不去，而且甲不去，则丙一定不去。如果周末丙去了，则甲_____(去了/没去)，乙_____(去了/没去)，丁_____(去了/没去)，周末_____(下雨/没下雨)。

03 课堂练习

7.【NOIP2016】下图表示一个果园灌溉系统，有 A、B、C、D 四个阀门，每个阀门可以打开或关上，所有管道粗细相同，以下设置阀门的方法中，可以让果树浇上水的是(　　)。



A．B 打开，其他都关上

B．AB 都打开，CD 都关上

C．A 打开，其他都关上

D．D 打开，其他都关上

03 课堂练习

8.【NOIP2001】在 a,b,c,d,e,f 六件物品中，按下面的条件能选出的物品是：

(1) a,b 两样至少有一样

(2) a,d 不能同时取

(3) a,e,f 中必须有 2 样

(4) b,c 要么都选，要么都不选

(5) c,d 两样中选一样

(6) 若 d 不选，则 e 也不选

9.【NOIP2004】75 名儿童到游乐场去玩。他们可以骑旋转木马，坐滑行铁道，乘宇宙飞船。已知其中 20 人这三种东西都玩过，55 人至少玩过其中的两种。若每样乘坐一次的费用是 5 元，游乐场总共收入 700，可知有名儿童没有玩过其中任何一种。

【不定项选择题】

不定项选择题

1.【NOIP2008】设A=true,B=false,C=true,D=false,以下逻辑运算表达式值为真的有(　　)。

A.(A∧B)∨(C∧D∨¬A)　　B.((¬A∧B)∨C)∧¬D

C.(B∨C∨D)∨D∧A　　D.A∧(D∨¬C)∧B

2.【NOIP2011】在布尔逻辑中，逻辑“或”的性质有(　　)。

A.交换律：P∨Q = Q∨P

B.结合律：P∨(Q∨R) = (P∨Q)∨R

C.幂等律：P∨P = P

D.有界律：P∨1 = 1 (1 表示逻辑真)

3.【NOIP2014】若逻辑变量 A、C 为真，B、D 为假，以下逻辑运算表达式为真的有(　　)。

A.(B ˇ C ˇ D) ˇ D ^ A　　B.((¬A ^B) ˇ C) ^ ¬B

C.(A ∧ B) ∨ (C ∧ D ∨ ¬A)　　D.A ∧ (D ∨ ¬C) ∧ B

不定项选择题

4.【NOIP2012】逻辑异或(⊕)是一种二元运算，其真值表如下所示。

a	b	$a \oplus b$
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	False

以下关于逻辑异或的性质，正确的有(　　)。

A. 交换律：a ⊕ b = b ⊕ a

B. 结合律：(a ⊕ b) ⊕ c = a ⊕ (b ⊕ c)

C. 关于逻辑与的分配律：a ⊕ (b ∧ c) = (a ⊕ b) ∧ (a ⊕ c)

D. 关于逻辑或的分配律：a ⊕ (b ∨ c) = (a ⊕ b) ∨ (a ⊕ c)

《信息学奥赛一本通·初赛真题解析》

第三章 数学问题

第8节 博弈论入门

博弈论入门

（一）最简单取石子游戏

只有一堆 n 个物品，两个人轮流从这堆物品中取物，规定每次至少取一个，最多取 m 个，最后取完者得胜。

显然，如果 n=m+1，那么由于一次最多只能取 m 个，所以，无论先取者拿走多少个，后取者都能够一次拿走剩余的物品，后者取胜。因此我们发现了如何取胜的法则：如果 n=(m+1)r+s，(r 为任意自然数，s≤m)，那么先取者要拿走 s 个物品；如果后取者拿走 k(k≤m 个，那么先取者再拿走 m+1-k 个，结果剩下（m+1）*（r-1）个，以后保持这样的取法，那么先取者肯定获胜。总之，要保持给对手留下(m+1)的倍数，就能最后获胜。即若 n=k(m+1) 则后取者胜，反之，存在先取者获胜的取法。n%(m+1)==0，先取者必败。

博弈论入门

（一）最简单取石子游戏

这个游戏还可以有其他变相的玩法：两个人轮流报数，每次至少报一个，最多报十个，谁能到100者获胜：从一堆100个石子中取石子，最后取完的获胜。

博弈论入门

（二）Nim 取石子游戏

有 k 堆各 n 个石子，两个人轮流从某一堆取任意多的物品，规定每次至少取一个，多者不限。取走最后石子的人获胜。

这个问题就是最经典的 Nim 取石子问题。

令 C=A(1)xorA(2)xorA(3)xorA(n)，若 C>0，则记为利己态，用 S 表示;若 C=0，则记为利他态，用 T 表示。

（二）Nim 取石子游戏

[证明]既然是 S 态，则此时 C>0，我们要使得 C 变为 0。

设 C 转化为二进制后，最高位的 1 是第 p 位。那么一定存在一个 A(t)的二进制最高位的 1 是第 p 位。(显然，C 的第 p 位不可能是 1)

然后， 把第 t 堆石子的个数变为 x=A(t)xor C。因为 A(t)和 C 的二进制最高位的 1 是同一位。那么异或之后这一位就变成了 0。那么 x 一定小于 A(t)。

此时的 C’=A(1)xorA(2)xor…… xorA(t)xor C xor A(t+1)xor …… xorA(n)。把 C 代入，得到 C’=A(1)xorA(2)xor ……xorA(n)xorA(1)xorA(2)xor ……xorA(n)，由异或的性质可得，C’=0。因此，只要在第 t 堆石子中取出 A(t)-x 颗石子，就把 S 态变为了 T 态。

【课堂练习】

02 课堂练习

1.【NOIP2005】取火柴游戏的规则如下：一堆火柴有 N 根，A、B 两人轮流取出。每人每次可以取 1 根或 2 根，最先没有火柴可取的人为败方，另一方为胜方。如果先取者有必胜策略则记为 1，先取者没有必胜策略记为 0。当 N 分别为 100，200，300，400，500 时，先取者有无必胜策略的标记顺序为（回答应为一个由 0 或 1 组成的字符串）。

谢谢！